

Giacomo Rossi

Constructio Labyrinthi

Aspetti matematici per la costruzione del labirinto in
S. Maria Annuncia in Chiesa Rossa a Milano

maggio, 2003



«*Hunc mundum tipice Laberinthus denotat iste:
intranti largus, redeunti set nimis artus.*»

Iscrizione nella chiesa di S. Savino a Piacenza

Molto spesso la matematica inizia con delle definizioni. Dare una definizione non è soltanto dichiarare l'oggetto in questione, dire cosa si vuole trattare. La definizione deve già contenere in se i termini del problema nonché, a volte, la strada di una sua ipotetica soluzione. Definire, per esempio, il cerchio come forma ottenibile con un compasso porta difficilmente (a meno di non essere costruttori di compassi) a speculazioni teoriche. Tuttavia, definirlo come il luogo dei punti di un piano equidistanti al centro significa già avere in mente che questa caratteristica sarà quella che servirà per uno studio futuro.

Anche nel nostro caso la definizione che daremo di labirinto unicursale sarà funzione dei problemi e degli scopi che ci proponiamo e, per questo motivo, necessita già di una comprensione dell'argomento. Non solo, proprio per la molteplicità di domande che si possono porre riguardo la loro topologia saremo in grado di dare più definizioni equivalenti di labirinto.

Per questo motivo non inizierò nel modo più elegante e sintetico, proprio della matematica, ma tenterò di esporre i quesiti e le osservazioni che possono nascere osservando la forma di un labirinto e seguendo più il nascere delle idee che il rigore formale.

Disegnare un labirinto non è una operazione banale. Può essere relativamente facile appropriarsi dai libri o dalla fantasia di un labirinto abbastanza piccolo, ma la sua forma resterà per noi del tutto ignota. Prova ne è che se vogliamo ampliare il nostro disegno, aumentando il numero dei giri, le possibilità che avremo di tracciare il sentiero inizieranno a non essere più banali e difficilmente termineremo l'opera.

I costruttori di labirinti, fin dalla antichità, ne conoscevano di più generi. Disegnavano labirinti a "percorso semplice e alternato" che chiameremo SAT (simple alternating transit)¹, come il labirinto di Creta (fig. 1), e labirinti più complessi e articolati come quelli di epoca romana (fig. 2) oppure Cristiani, tipici nelle grandi Cattedrali Gotiche (fig. 3).

Come si riconosce osservando la prima figura, i labirinti SAT si distinguono dagli altri per le seguenti caratteristiche peculiari: chi li percorre compie un cammino senza biforcazioni (unicursale) facendo un giro comple-

¹Usiamo il nome attribuitogli dal matematico americano Anthony Phillips, uno dei primi a studiare questo genere di labirinti, [1].

to ad ogni livello (in particolare ogni livello è percorso interamente e una volta soltanto) e invertendo il senso del cammino alla fine di ogni livello.



Figura 1: Labirinto di Creta

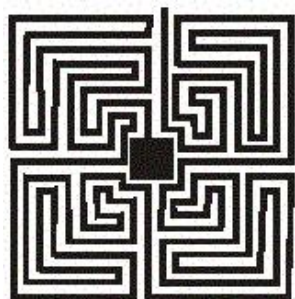


Figura 2: Labirinto di Romano



Figura 3: Labirinto di Amiens

Con la parola livello intendo, immaginando un labirinto di forma circolare, quella determinata circonferenza che compone il percorso. In altri termini, possiamo immaginare il percorso di un labirinto come formato da tante circonferenze concentriche, percorse in un determinato ordine, e chiamiamo livello ognuna di queste circonferenze. Decido inoltre di considerare un livello anche il centro e un cerchio aggiuntivo al percorso che considero l'esterno del labirinto e denoto con 0. Se dico che un labirinto ha n livelli voglio intendere che il percorso è costituito da n circonferenze concentriche (o quadrati se il labirinto ha una forma estetica quadrata), considerando anche il centro. Uso la parola livello proprio per slegarmi dalla forma estetica: circolare, quadrata o altro. E' facile infatti convincersi che un labirinto può avere lo stesso percorso unicursale pur appearing in forme estetiche differenti. Vedremo in seguito dei modi alternativi per rappresentare un percorso unicursale di un labirinto, indipendentemente dalla sua forma abituale.

Date le caratteristiche descritte e guardando le figure riportate, si vede subito che i SAT sono la categoria più semplice di labirinto. Per questo motivo, anche se il labirinto che abbiamo disegnato non rientra in tale categoria, sarà importante iniziare da essi. Ci interessano in particolare due problemi:

- (1) Descrivere i labirinti in forma matematica, in modo da poterli studiare, e comprendere come sono costruiti.
- (2) Dato un certo numero di livelli fissati, che determina la grandezza del labirinto – e quindi, nel nostro caso, era una funzione fissata dello spazio a disposizione –, determinare il numero di labirinti che è possibile disegnare trovando un metodo per poterli disegnare tutti.

Da qui in avanti la risoluzione di questi due problemi costituisce il no-

stro scopo principale, inizialmente nel caso più semplice di labirinti SAT, quindi nel caso complesso. Premetto che una risoluzione generate all'ultimo problema non è ancora stata trovata neanche nel caso più semplice dei SAT. Tuttavia si può dire che, almeno nel caso dei SAT, la teoria è in grado di risolvere praticamente tutti i casi, mentre per i labirinti più articolati è necessario determinare dei vincoli più stretti che li caratterizzino e quindi costruirsi una teoria specifica a seconda delle scelte fatte. Per questo motivo, come si vedrà in seguito, la risoluzione dell'ultimo problema, nel caso complesso, è limitata al genere di labirinto che abbiamo deciso di costruire.

Torniamo ai labirinti SAT e riprendiamo l'osservazione che indicava una distinzione tra la forma estetica di un labirinto, se quadrata, circolare ecc., e il tipo, diciamo solamente forma, di percorso descritto. Cerchiamo di andare oltre e rappresentare un percorso di labirinto SAT indipendentemente dalla forma estetica. Tale ricerca, si noti, non è giustificabile a priori, basterebbe riferirsi sempre ad una determinata forma estetica, per esempio quadrata, e, consci dell'equivalenza con le altre, lavorare solo su questa. Tuttavia la matematica è un'arte sintetica che odia scrivere tutto ciò che è o che può essere superfluo. Inoltre è evidente che, dato il procedere deduttivo, non possiamo fare altro che iniziare dall'oggetto in questione, il labirinto, e modificarlo in modo lecito, senza cioè modificare le caratteristiche che ora e a noi appaiono peculiari. Riscrivere la stessa cosa in modo diverso non è semplicemente avere una copia inutile o fare delle tautologie.²

Si osservi la seguente figura (fig. 4).

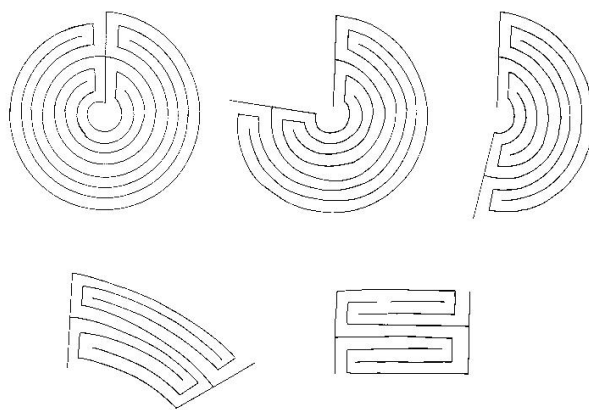


Figura 4: Srotolamento del labirinto di Creta

Essa rappresenta il labirinto di Creta (fig. 1) e il procedimento per un suo cambiamento di forma che porta a una figura alquanto dissimile da

²Chi non fosse convinto consideri semplicemente l'operazione $1 + 1 = 2$. Non si è fatto altro che dire in due modi diversi la stessa quantità.

quella iniziale e che chiameremo FF (fundamental form)³. Si osservi: la FF del labirinto di Creta, e in generale qualsiasi FF, non è un labirinto nella definizione comune che identifica il labirinto come percorso che da un esterno porta verso un centro, mancando evidentemente un esterno e un centro. Non solo, nella forma rettangolare FF potrei entrare dall'ingresso in alto come da quello in basso. Per evitare questo ultimo inconveniente, che porterebbe ad avere una FF che rappresenta due labirinti invece di uno, usiamo come convenzione di considerare l'entrata dall'alto e il centro in basso. In questo modo la FF rappresenta perfettamente la "forma del percorso" di uno ed un solo labirinto e vale anche il viceversa. Naturalmente possiamo disegnare, invece delle linee di delimitazione del percorso, solamente la linea che traccia il percorso. Otteniamo così la seguente figura del tutto equivalente (fig. 5).

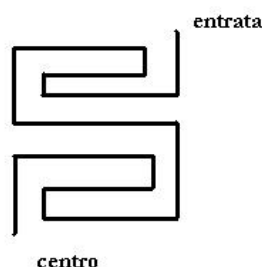


Figura 5: FF del labirinto di Creta

Sarà immediato distinguere una FF che traccia il percorso, da una FF che indica la delimitazione del percorso del labirinto. Basti l'osservazione che, se è disegnata la delimitazione, la linea della FF non è un'unica linea spezzata, mentre lo è se rappresenta il percorso. In altro modo sarà evidente osservando se le linee delimitano o no un percorso. Il processo di srotolamento per creare una FF, è applicabile a qualunque tipo di labirinto, ed anche il procedimento inverso, da FF a labirinto, come vedremo in seguito, è sempre possibile.

C'è anche un altro modo per rappresentare in modo sintetico un labirinto. Più che un metodo consiste in un gioco e se ne ha traccia fin dall'antichità, come mostra il coccio datato 604 a.C. (fig. 6). Si tratta, in sostanza, partendo da una figura iniziale, di unire con degli archi, alternativamente, un punto e un estremo di linea fino a formare il classico labirinto, (fig. 7). La figura iniziale, dato che, se corretta, è riconducibile a un labirinto e vale anche il viceversa, potrebbe essere usata come rappresentazione di un labirinto ed in generale è detta nucleo del labirinto. Tuttavia essa non è facile da manipolare e non si osservano bene certe strutture che appaiono



Figura 6: Coccio datato 604 a.C.

³Anche qui manteniamo la notazione introdotta dalla matematica Tessa Morrison, vedi [2].

invece evidenti attraverso le FF. Quindi non tratteremo queste forme di rappresentazione.

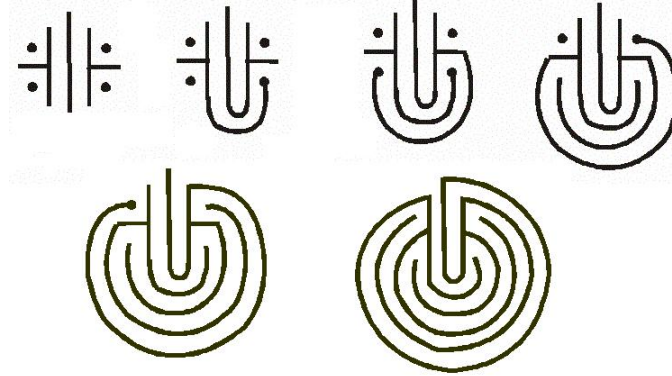


Figura 7: Altro modo per rappresentare un labirinto

Ritorniamo alla FF del labirinto di Creta (fig. 5). Appare evidente che tale forma è costituita da due forme elementari unite una sopra l'altra (fig. 8). Diamo quindi una seconda definizione chiamando tali forme elementari FE (fundamental elements). I vari FE saranno quindi le unità indivisibili che costituiscono le FF e quindi un labirinto.

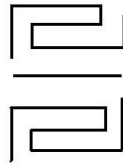


Figura 8: FE del labirinto di Creta

Il punto è ora il seguente: quante sono le FE e come si possono unire tra loro. Per rispondere a tale domanda cerchiamo di determinare un labirinto non solo attraverso un disegno ma anche attraverso una successione di numeri.

Consideriamo la successione con cui sono percorsi i vari livelli. Per fare questo dobbiamo numerarli, poniamo dall'esterno all'interno, partendo dallo zero. Lo zero rappresenta l'esterno mentre l'ultimo numero il centro. Chiaramente il centro ha numero n . Fissata tale numerazione possiamo considerare la successione di numeri che descrive il percorso (il passare da un livello all'altro per arrivare al centro). Per esempio, il labirinto di Creta è descritto dalla seguente successione di numeri: 0, 3, 2, 1, 4, 7, 6, 5, 8. Nella fig. 9 è rappresentato un altro esempio.

Possiamo fare due osservazioni:

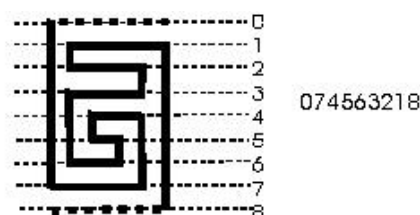


Figura 9: Numerazione dei livelli

i) Le successioni si ottengono non solo, come descritto, considerando il susseguirsi dei livelli, ma anche equivalentemente le FF. Infatti, se si numera una FF, dall'alto in basso (si osservi la fig. 9) e si considera la forma del percorso, otteniamo lo stesso risultato. Questo è vero in generale per qualsiasi FF, e deriva dal fatto che lo srotolamento non altera il percorso ed è quindi una operazione corretta. Questa osservazione permette anche il passaggio inverso da una FF ad un labirinto. Per un labirinto SAT è sufficiente infatti scrivere la successione di livelli, tracciare le circonferenze concentriche e quindi seguire la successione. Per gli altri labirinti l'operazione è più complessa ma sempre eseguibile.

ii) Anche la successione dei livelli rispecchia il fatto che la FF è formata da due FE. La successione 3, 2, 1, 4 è infatti isomorfa a 7, 6, 5, 8. Entrambe sono del tipo $(n - 1), (n - 2), (n - 3), n$. Questa osservazione permette di denotare meglio le FE e quindi di rispondere alla prima domanda che chiedeva quante FE esistono. Le FE sono infatti equivalenti alle successioni elementari che compongono la successione dei livelli. Sono equivalenti nel senso che una FE può essere definita sia come successione fondamentale che come forma. Ora, da uno studio generale dei labirinti risulta che tutti i labirinti unicursali classici (sia SAT che non) si possono scrivere, nella loro successione di livelli, come una particolare successione di cinque FE elementari:

1) La successione $\gamma_n = 0, (n - 1), (n - 2), (n - 3), \dots, 1, n$; dove lo zero esiste solo se si tratta della prima FE. Di questo tipo sono le FE del labirinto di Creta. In particolare indichiamo con il doppio apice γ_4^2 una FF composta da due FE γ_4 , ovvero il labirinto composto da due FE di tipo γ il primo con $n = 4$ ed il secondo con $n = 2 \times 4 = 8$.

2) La successione $\phi_n = 0, 1, 2, \dots, n$.

3) La successione $\eta_n = 0, (n - 1), 1, (n - 3), 2, (n - 5), 4, \dots, 1, n$, in sostanza, se n è pari, una successione decrescente di dispari alternata ad una crescente di pari.

4) e 5) Le successioni α_n e $\alpha_2[\alpha_n]$ o $\alpha_n[\alpha_2]$, dove le parentesi quadre indicano l'annidarsi dei livelli, si veda la fig. 10. L'indice n indica il ripetersi di una forma avente n linee orizzontali. Queste due successioni, in senso

largo, non servono per i labirinti SAT, mentre sono fondamentali per studiare i labirinti più complessi, come quelli dei mosaici romani o delle cattedrali.

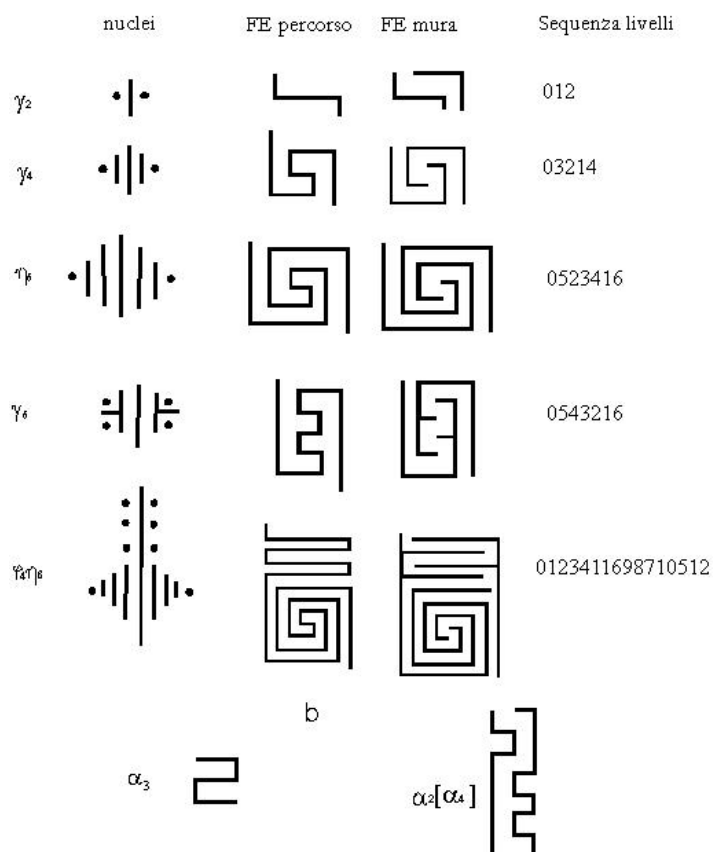


Figura 10: Rappresentazione dei nuclei, FE e sequenza dei livelli

Abbiamo quindi risposto alla prima domanda riguardo le forme elementari FE. Cerchiamo ora delle regole per poter unire correttamente le FE e quindi per poter costruire un labirinto. A tale scopo l'osservazione *ii)* e le forme di successioni non ci saranno di grande aiuto. Meglio, tale osservazione è fondamentale per una descrizione a posteriori della topologia dei labirinti, per capirne la struttura, ma difficilmente si giunge a una formula che copra tutti i casi possibili. In altre parole è più semplice cimentarsi su delle condizioni generali della successione di livelli, in particolare nel caso dei SAT, piuttosto che cercare condizioni per unire le FE. Quello che abbiamo fatto noi per disegnare il labirinto, volendo un labirinto non SAT, ancora ignari di queste teorie, è stato di creare un altro modello, che esporrò in seguito, in grado di fornire, con condizioni opportune, la soluzione in un intervallo di livelli teoricamente soddisfacente.

Cerchiamo allora di approfondire l'osservazione *i*). Consideriamo solo i labirinti SAT. Possiamo fare la seguente considerazione (Teorema): il percorso di un labirinto SAT è univocamente determinato dalla sequenza di numeri che descrivono la successione con cui i suoi livelli sono percorsi. Si noti che in generale, senza sapere il tipo di labirinto, tale affermazione non è vera. Basti pensare a un labirinto non unicursale che può ritornare più volte sullo stesso livello, senza sapere la struttura del labirinto non sappiamo a che punto deve avvenire il salto di livello. Se conosciamo però la struttura, per esempio se ha degli assi secondari o meno (fig. 11), l'osservazione risulta altrettanto valida.

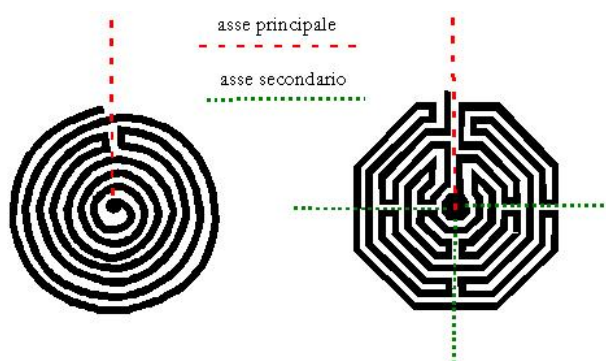


Figura 11: Assi principali e secondari di un labirinto

Questa osservazione fa sì che la ricerca di determinate regole sulle successioni abbia senso, ovvero porti effettivamente a poter costruire un labirinto unicursale. Se non fosse vero crollerebbe fatalmente tutto il castello che stiamo cercando di costruire. Dato un labirinto potremmo sempre ricavarne la successione dei livelli, ma non sarebbe vero il contrario. Il teorema sopra enunciato evita questo disastro.

Cerchiamo allora delle regole sulla successione dei livelli che rifletta la caratteristica di SAT.

Si nota facilmente che, per un labirinto SAT, devono essere vere le seguenti affermazioni:

- 1) Ogni sequenza di livello inizia con 0 e finisce con un numero n (vero per ogni successione che voglia essere la descrizione del percorso di un labirinto).
- 2) Non vi possono essere dei numeri di livello ripetuti
- 3) Nella sequenza dei livelli i numeri pari e quelli dispari devono alternarsi.
- 4) Consideriamo le coppie di numeri consecutivi in una sequenza di livello che inizia con un mero pari. Non è difficile notare che queste corrispondono ai segmenti verticali (diremo anche ponti) che uniscono due livelli sul lato destro del labirinto, o anche della FF. Lo stesso accade per le coppie che

iniziano con un numero dispari, esse rappresentano i segmenti verticali sul lato sinistro (fig. 12).

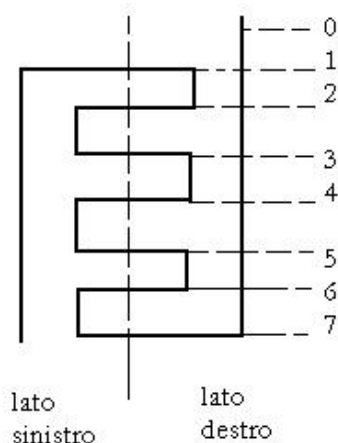


Figura 12: Corrispondenza tra livelli e FF

La 1) è ovvia e anche la 2) visto che ogni livello deve essere percorso una sola volta. Per dimostrare la 3) consideriamo il percorso di un labirinto nella sua forma classica. Supponiamo per assurdo che due livelli successivi qualsiasi della sua successione, che nel labirinto saranno uniti da un segmento verticale (diciamo “ponte”), poniamo sulla destra del percorso di ingresso, siano entrambi pari. Lo spazio compreso tra i due deve avere un numero di livelli dispari. Tuttavia perché i livelli annidati all’interno dei due livelli considerati siano uniti devono essere (non potendo creare intersezioni) necessariamente pari. Ciò porta evidentemente ad una contraddizione e quindi due livelli successivi non potranno essere entrambi pari oppure dispari, ma saranno alternati.

Cerchiamo di capire anche la 4). Pensiamo al labirinto nella forma FF con un ingresso per esempio sulla destra. La sequenza inizia sul lato destro dal livello 0, e prosegue su qualche livello dispari (per l’osservazione 3)). Esso prosegue verso sinistra e andrà su un nuovo livello pari, poi si sposterà sulla destra e cambierà ancora di livello verso un livello dispari ecc. Quindi i salti di livello descritti da due numeri (livello di partenza e di arrivo) che iniziano con un pari rappresentano i segmenti verticali sulla destra. Invece le coppie che iniziano con un numero dispari rappresentano i segmenti verticali sulla sinistra.

Queste quattro regole descrivono completamente, (sono sufficienti e necessarie), un labirinto SAT. Per creare un labirinto SAT si può quindi compiere delle permutazioni dei numeri interi da 0 a n (fissato n , creare tutte le successioni da 0 a n mutando l’ordine degli elementi) e controllare quali tra queste soddisfano le regole enunciate. Per esempio, se vogliamo individuare

tutti i SAT di 8 livelli (quindi $n = 7$ perché iniziamo con lo zero) dobbiamo calcolare tutte le permutazioni dei numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ovvero tutti i modi di scrivere una successione con quei numeri scambiando l'ordine (saranno $8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$)⁴, quindi scriverli tutti per scartare quelli che non soddisfano le tre regole enunciate. Poiché considerare 40320 successioni è abbastanza lungo, si può restringere il numero delle permutazioni osservando che, per l'osservazione 2), i numeri pari e quelli dispari non possono essere scambiati tra loro, e quindi basta guardare le coppie di permutazioni formate una dai numeri dispari (da 1 a $(n - 1)$), l'altra da quelli dei pari (da 2 a $(n - 2)$). Ovvero le permutazioni dei numeri 1, 3, 5, 7 (che saranno $4! = 24$) per le permutazioni di 2, 4, 6 ($3! = 6$), . Bisogna ora controllare 144 successioni e scegliere quelle corrette. Per fortuna i computer sono in grado di fare questo controllo e, costruito il programma, si può ricavare con facilità la seguente tabella e figura.⁵

Numero livelli	Numero labirinti SAT	Rappresentazione dei labirinti significativi
1	1	nessuna
2	1	nessuna
3	1	nessuna
4	2	03214
5	3	nessuna
6	8	0523416 0543216 0345216 0541236
7	14	03216547
8	42	036547218 072345618 072365418 072543618 054367218 056723418 056741238 056743218 074325618 074561238 074563218 076123458 076345218 076523418 076541238 076543218 076321458 032147658 034567218 034765218 076125438 076143258

⁴Il simbolo $x!$ indica x fattoriale: $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times x$.

⁵Cfr. [1].

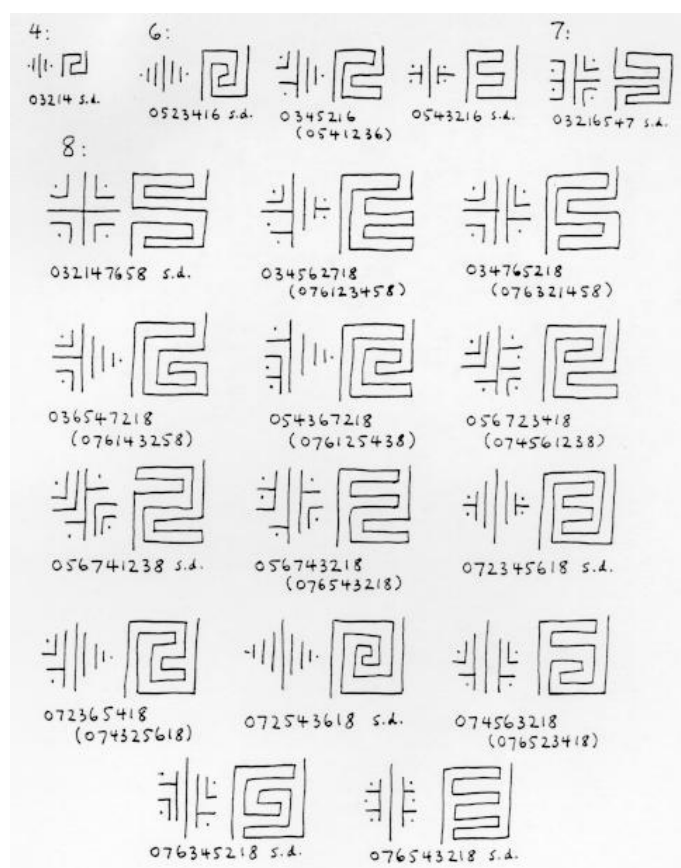


Figura 13: Tutti i possibili labirinti per i livelli da 4 a 8

Per labirinto significativo si intende un labirinto che non è costruito con l'aggiunta, nella parte esterna e/o in quella interna, di un numero di livelli insignificanti (livelli uniti in progressione, senza "salti").

Appare subito evidente che, malgrado l'uso dei calcolatori, procedere in questa tabella diventa estremamente lungo. A rendere laboriosa la ricerca dei numeri non solo è la mancanza di una formula che permetta un calcolo diretto, diciamo la funzione $L(n)$ (dato n numero dei livelli, posso ricavare L , numero dei labirinti), ma anche il fatto che $L(n)$ aumenta in modo esponenziale all'aumentare di n . Infatti il numero di coppie di permutazioni (pari e dispari) da considerare cresce, all'incirca come $((n/2)!)^2$. Per esempio, per $n = 20$ bisogna esaminare circa 10^{13} coppie di permutazioni.

Fino a quando non si troverà la formulazione esatta di $L(n)$ è utile ricorrere a metodi di calcolo o stratagemmi che permettano di diminuire tale numero di permutazioni da controllare.

Un metodo di calcolo più rapido è stato ideato da John E. Koehler in un articolo pubblicato nel 1968⁶. $L(n)$ per n pari può essere descritto allo

⁶John E. Koehler, *Folding a strip of stamps*, J. Combinatorial Th. 5 (1968) pagg.

stesso modo come tutti i possibili modi di unire n punti di un cerchio con corde di colori alternati, poniamo rosso e verde (nel disegno, fig. 13, linee tratteggiate e continue), senza che due corde dello stesso colore si intersechino e con la condizione che le corde formino un'unica figura chiusa dove si possa tornare al punto di partenza dopo aver percorso n corde. I calcoli di Koehler adattati al labirinto funzionano in questo modo. Consideriamo un labirinto a n livelli e n punti su una circonferenza numerati in modo consecutivo da 0 a $n - 1$. Per ogni ponte a destra rispetto l'ingresso (che è uguale ad un segmento verticale nella metà destra nella FF) corrisponde una corda in verde tra due numeri. Poiché il labirinto attraversa solo una volta ogni livello, ogni punto sarà ad un'estremità di una corda verde. Lo stato annidato di sovrapposizione significa esattamente che nessuna delle corde verdi si interseca. La stessa cosa per i segmenti verticali di sinistra, ma le corde ora sono rosse ed identificano i ponti dal livello n al livello 0.

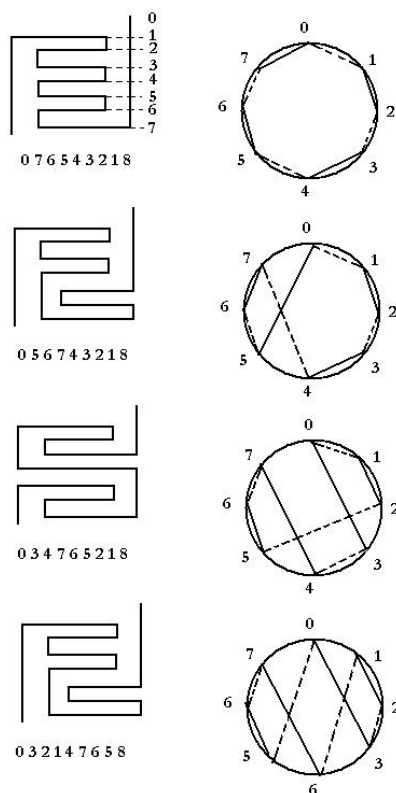


Figura 14: FF e n punti di un cerchio uniti con corde di colore alternato

Di nuovo, ogni punto è ad un'estremità di una corda rossa e nessuna corda rossa si interseca con se stessa. Ora, iniziando dal punto 0 ci si muove lungo le corde, in primo luogo su una corda verde, quindi su una rossa, ecc.

I punti saranno raggiunti esattamente nella stessa sequenza in cui i livelli sono attraversati dal labirinto. Poiché il percorso del labirinto raggiungerà il livello n dopo n punti, la corda tornerà esattamente al punto di partenza 0. Per contro, data una configurazione della corda come descritta precedentemente, si interpretano le corde verdi come segmenti verticali di destra del labirinto e quelle rosse come segmenti verticali di sinistra. La proprietà della non-intersezione tra le corde garantisce che i ponti siano (eventualmente) annidati e sicuramente non si intersechino. In questo modo il percorso lungo le corde o attraverso il labirinto è identico e il numero di configurazioni per le corde sarà uguale al numero di labirinti SAT. La fig. 14 rappresenta solo 4 tra i 42 casi.

Ciò che rende utile questa rappresentazione ai fini del calcolo è che conosciamo la soluzione, ovvero il numero di tutte le possibili configurazioni, per i due casi separati di k corde di un colore solo che non si intersecano e uniscono tutti gli n punti, con $n = 2k$ su una circonferenza. In sostanza conosciamo il numero delle configurazioni nella fig. 13 per la corda rossa e separatamente per la corda verde (tratteggiata e non). Conoscendo il numero di configurazioni per i due colori distinti, diciamo A e B (naturalmente A^2 perché $A = B$ essendo identiche le condizioni), è chiaro che il numero di configurazioni per il disegno con entrambi i colori (la soluzione del problema, fig. 13) sarà sempre minore o uguale al prodotto $A \times B$ (essendo $A = B$).⁷ Più precisamente, risolvere il problema separatamente per i colori rosso e verde significa: dati $n = 2k$ punti su una circonferenza, numerati da 0 a $(n - 1)$ per cui n è dispari, (per esempio gli 8 punti sulla circonferenza della fig. 14), trovare il numero di combinazioni possibili (abbiamo detto A) per cui k ($k = n/2$) corde uniscano tutti gli n punti senza intersecarsi (nella fig. 15 due esempi per $n = 4$ e $n = 6$).

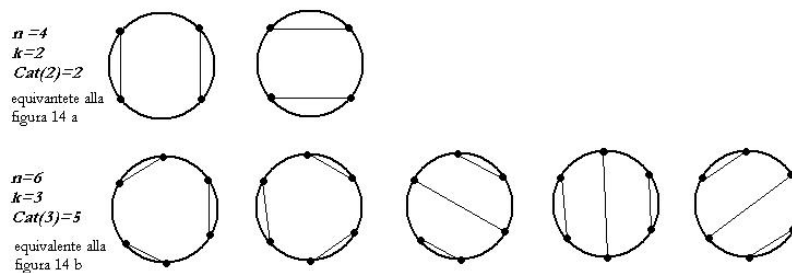


Figura 15: Esempi per $n = 4$ e $n = 6$

⁷Se, per esempio, il rosso ha tre configurazioni a, b, c e il verde a', b', c' , allora per il disegno con rosso e verde insieme potrò avere le nove (3×3) configurazioni distinte: $a, a'; b, a'; c, a'; a, b'; b, b'; c, b'; a, c'; b, c'; c, c'$. Ora, tra tali configurazioni ve ne sono anche di non chiuse, che non formano una figura chiusa (condizione per l'equivalenza con i labirinti, fig. 14) e quindi è chiaro che le configurazioni totali sono minori (in casi particolari uguali) a $A \times B$.

Si dimostra che tale numero è $A = \text{Cat}(k) = \frac{\binom{2k}{k}}{k+1}$, dove indico con $\binom{2k}{k}$ il coefficiente binomiale $\frac{2k!}{k!(2k-k)!}$. Per convenzione poniamo $\text{Cat}(0) = \text{Cat}(1) = 1$, quindi risulta $\text{Cat}(2) = 2$, $\text{Cat}(3) = 5$, $\text{Cat}(4) = 14$, $\text{Cat}(5) = 42$, $\text{Cat}(6) = 132$, $\text{Cat}(7) = 429$ ecc. Tali numeri sono detti di Catalan⁸, ed indicano, tra l'altro, il numero di modi possibili di suddividere un poligono di $(k+2)$ lati in k triangoli (fig. 15). Il collegamento con tali numeri si può anche vedere attraverso la somiglianza dei due problemi.⁹

Ora i numeri di Catalan anche se sono definiti attraverso i fattoriali crescono solo esponenzialmente. Infatti per k grande $\text{Cat}(k) \approx \frac{4^k}{\sqrt{k^3\pi}}$. Avendo fatto vedere che $L(n) \leq (\text{Cat}(n/2))^2$, dovremo controllare un numero di successioni di livelli (verificando le 4 condizioni sopra enunciate) che cresce esponenzialmente. Tale metodo può anche essere esteso per il conto del numero di labirinti SAT per n pari e anche il conto dei labirinti interessanti, diciamo $I(n)$. L'estensione ai numeri pari è fatta utilizzando la formula $L(n) = I(n) + 2I(n-1) + 3I(n-2) + \dots + (n-3)I(4)$. Per prima cosa si ricava $I(2n-1)$ da $L(2n)$ e $I(2n)$, quindi si calcola $L(2n-1)$ da $I(2n-1)$. Il risultato è la tabella riportata nella pagina seguente.¹⁰

Tony Phillips che ha eseguito il calcolo, afferma che per trovare l'ultima riga sono state necessarie 73 ore di tempo di un calcolatore Sun-3 e per calcolare $n = 24$ sarebbero necessarie 1168 ore (49 giorni). Resta quindi il problema di trovare un algoritmo che dia $L(n)$ in un numero di passi che cresca al più come una potenza e non in modo esponenziale. Inoltre si potrebbe cercare una formula che dia in modo approssimato il valore di $L(n)$ per n molto grande. Jim Reeds, della Bell Labs, ha provato che per n molto grande vale, $L(2n) \leq (2 + \sqrt{3})^{2n}$.

⁸Eugène Charles Catalan (1814-1894).

⁹In modo rigoroso tale osservazione si prova facendo vedere che il numero di k -combinazioni soddisfa le stesse condizioni dei numeri di Catalan: $\text{Cat}(k+1) = \sum_{i=1}^k \text{Cat}(i)\text{Cat}(k-i)$.

¹⁰Cfr. [1].

n	$L(n)$	$I(n)$
1	1	0
2	1	0
3	1	0
4	2	1
5	3	0
6	8	4
7	14	1
8	42	22
9	38	11
10	262	142
11	538	95
12	1828	1014
13	3926	202
14	13820	7796
15	30694	6980
16	110954	63386
17	252939	61725
18	933458	538534
19	2172830	558853
20	8152860	4740658
21	19304190	5171300
22	73424650	4269130

Allo stesso identico calcolo si arriva anche da problemi apparentemente differenti da quello dei labirinti SAT. Il matematico di Mosca V. I. Arnold risolveva nel 1988 un calcolo analogo sul problema dei meandri. Un meandro è definito come una curva d'intersezione orientata che interseca, in diversi punti, una linea retta anch'essa orientata (fig. 16)

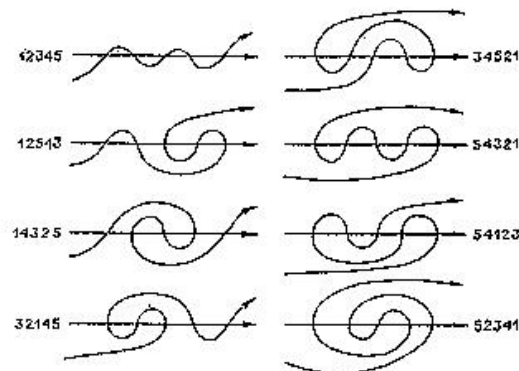


Figura 16: Esempi per $n = 4$ e $n = 6$

Il suo articolo contiene questa stessa figura che, se inclinata verso destra, mostra esattamente gli otto percorsi di labirinto di 6 livelli. Arnold calcolò i labirinti fino al sedicesimo livello.¹¹

Analizziamo ora la topologia dei labirinti presenti nelle grandi cattedrali per arrivare a capire il labirinto che abbiamo disegnato. Come mostrato nella fig. 11 tali labirinti, il cui percorso può non compiere interamente un livello, hanno quattro assi privilegiati lungo i quali ci sono i salti di livello. In particolare, oltre all'asse principale, obbligatorio per tutti i labirinti per permettere l'ingresso, sono presenti altri tre assi disposti a croce. Come abbiamo osservato, noti questi assi e nota la sequenza dei livelli il labirinto è sempre determinato. Inoltre, anche in questo caso possiamo disegnarne la forma FF ed analizzare le sue FE. La fig. 17 mostra il risultato. Nel primo labirinto, (a), ho inquadrato nella FF le FE che la compongono e che sono riportate in forma lineare sotto ogni disegno. La rappresentazione attraverso la FF e le varie successioni, mette in evidenza la struttura topologica. In questi labirinti è possibile individuare una forma base semplice dei SAT, sulla quale viene costruito il percorso. Si consideri infatti solo il primo blocco (la prima colonna) che costituisce una FF. Se il labirinto finisse qui esse sarebbe un labirinto SAT avente forma mostrata nell'ultima colonna. Tale forma di SAT si ottiene anche eliminando i ponti sui tre assi e prolungando il cammino, come mostra nella fig. 18 esemplificando sul primo labirinto.

Il passaggio tra la forma costitutiva SAT e il labirinto finale è tutt'altro che intuitivo o schematizzabile. Tuttavia, l'uso delle FF permette di leggere in modo chiaro le strutture base e permette di visualizzare moduli di simmetria, ad esempio la struttura $(\alpha_2[\alpha_2])^2, \overline{\alpha_3^2}, \alpha_3^2, ([\alpha_2]\alpha_2)^2$ del primo labirinto di fig. 17 (la barra sopra o sotto indica l'aggiunta di un segmento verticale sopra o sotto la FE).

Si nota inoltre, alla luce di queste considerazioni, che il labirinto di Chartes (la figura 17d, solo che speculare rispetto l'ingresso) presenta un SAT del tutto simile al del labirinto di Creta (fig. 5 o 1).

Anche in questo caso la rappresentazione FF non è in grado di dare molte informazioni sul numero di labirinti possibili in funzione del numero dei livelli. Né un metodo certo per la costruzione. In sostanza non fornisce delle condizioni facilmente utilizzabili. Tuttavia si presta ad alcune considerazioni: la varietà dei labirinti SAT condiziona fortemente anche gli altri labirinti.

¹¹Circa nello stesso periodo, grazie a Vladimir A. Kazakov e Ivan Kostov, il calcolo del numero di labirinti SAT è venuto da un altro contesto: il calcolo di una matrice nella teoria del campo quantistico. Il lavoro è stato pubblicato da V. A. Zvonkin e S. K. Lando nel 1993. Anche Warren Smith, studente della Princeton University, in un altro studio completamente indipendente, arriva allo stesso risultato che fornisce il numero di possibili labirinti fino a venti livelli. Smith lavorando per la tesi di laurea, nel 1988, definì una funzione $jt(N)$ come il numero di modi topologicamente distinti in cui una curva di Jordan può attraversare, in esattamente $2N$ punti, una linea orientata nel piano ed ha compiuto il calcolo fino a $jt(10) = L(20) = 8152860$.

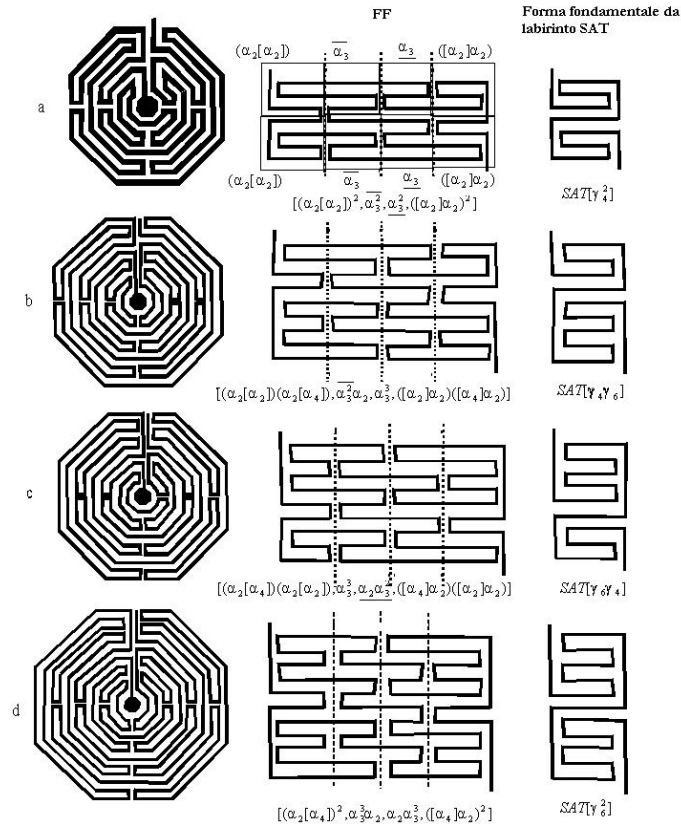


Figura 17: Struttura dei labirinti di Cattedrali

Se si vuole costruire un labirinto a sei livelli ($n = 5$), si hanno tre possibilità di labirinti SAT di base, tutte ricavabili dal labirinto SAT a quattro livelli con l'aggiunta di un livello "non significativo". Il labirinto base dovrà essere allora quello a quattro livelli dato dalla seguente successione di livelli: 0, 3, 2, 1, 4. Ovvero dovrà trattarsi di un labirinto costruito sulla successione di tipo γ_4 , esattamente come il labirinto di Creta e in analogia a quello di Chartres. Così è per il labirinto che abbiamo disegnato la cui FF è riportata nella seguente figura (fig. 19).

Cerchiamo ora di costruire delle condizioni che ci permettano di disegnare tutti i labirinti non SAT, aventi quattro assi, come quelli analizzati. Il modello qui riportato è stata creata appositamente per il disegno del labirinto di Santa Maria Annunciata in Chiesa Rossa grazie alla prof. Maria Dedò del dipartimento di Matematica F. Enriques di Milano. Il modello per rappresentare i labirinti descritti (aventi quattro assi) è quello dei grafi. Un grafo è rappresentabile come un disegno composto da $4n$ vertici di n quadrati inscatolati tra loro. Diciamo An, Bn, Cn, Dn , i quattro vertici dell' n -esimo quadrato inscatolato, come in figura. Inoltre chiamiamo H, M, N, P i pun-

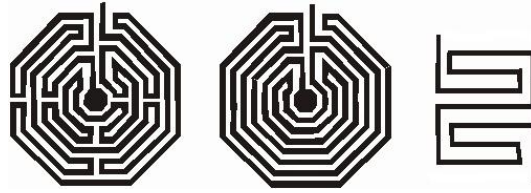


Figura 18: Da labirinto di Cattedrale a SAT

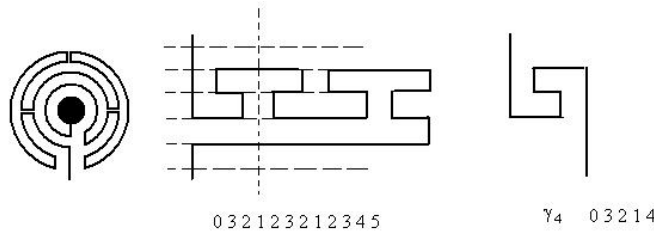


Figura 19: Labirinto in Santa Maria Annunciata in Chiesa Rossa a Milano

ti medi dei segmenti, dando anche ad essi, eccetto H , un indice di livello (fig. 20).

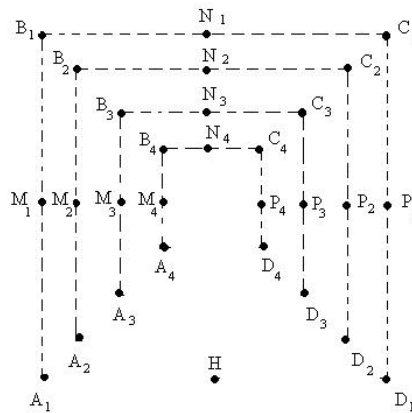


Figura 20: Grafo

I quattro vertici A, B, C, D potranno essere uniti da 2 o 3 segmenti (diciamo anche per comodità lati) che potranno essere AB, BC, CD , ma mai il segmento AD corrispondente all'entrata del labirinto. Questo passaggio è altamente intuitivo considerando il fatto che l'entrata, per essere realizzata, non può essere tagliata da un livello. Inoltre ci potranno essere dei segmenti che congiungono i vari livelli del tipo $A_i A_{i+1}$ o $M_i M_{i+1}$ e allo stesso modo per le altre lettere eccetto il vertice H che rappresenta l'ingresso del labirinto. La corrispondenza tra questo modello e un labirinto è abbastanza

semplice. Ai 4 vertici A, B, C, D di uno stesso livello del grafo corrispondono otto archi di circonferenza posti su due livelli del percorso del labirinto, diciamo a' e a'' . Ad ogni $4n$ vertici corrisponderanno quindi $8n$ archi di circonferenze su $2n$ livelli. I punti H, M, N, P , uniti alla lettera dell'arco su cui sono posti, identificano i vertici di ogni arco. Ad esempio, il vertice B del grafo corrisponde alla coppia di archi concentrici b' e b'' aventi come estremi rispettivamente i punti Mb' e Nb' , Ma'' e Na'' (fig. 21).

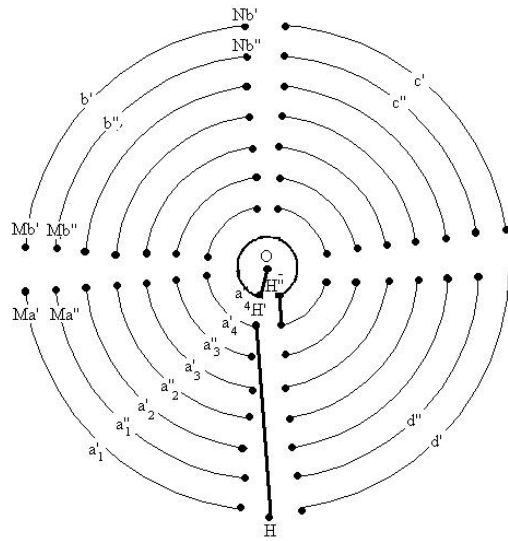


Figura 21: Grafo

Si può capire visivamente quanto abbiamo detto se si immagina di congiungere con degli archi di circonferenza i punti medi del grafo e si trasformano le lettere maiuscole dei vertici con le rispettive minuscole, ad esempio B con b' e b'' .

Il centro e l'ultimo giro sono una particolarità. Infatti dovendo disegnare un labirinto relativamente piccolo, il nostro vincolo era di sei livelli (percorso di 5 circonferenze, compreso il centro), non è possibile unire più forme elementari FE (che iniziano ad essere significativi da $n = 4$ o 6), e siamo perciò costretti a far iniziare il percorso obbligatoriamente dal penultimo livello escluso il centro, quindi terminare con un giro completo.

Questo significa, esemplificando rispetto al disegno 21, che gli archi $a_4', b_4'', c_4'', d_4''$ sono sempre uniti. Solo in questo modo siamo sicuri che l'ingresso nel centro avvenga senza problemi. Questa condizione rappresenta naturalmente una condizione in più sulla forma generale dei labirinti. Ogni lato dei quadrati di fig. 20 (AB o BC o CD) corrisponde alle due unioni degli archi di circonferenza posti sullo stesso livello. Ad esempio il lato AB corrisponde alle due unioni: a' con b' e a'' con b'' . Ogni segmento che congiunge tra loro i punti M, N, L di livelli successivi, esempio, rappresenta un

ponte tra due archi dei corrispondenti livelli. Se, da costruzione precedente, fosse già presente una unione circolare tra archi dello stesso livello che impedisce un ponte (unione radiale tra livelli differenti), cancello una unione circolare per inserire il ponte. Se un lato del grafo ha un estremo isolato, che non è unito a nessun altro segmento, nel labirinto unisco con ponti i vertici degli archi corrispondenti. Si vedano i seguenti esempi, (fig. 22).

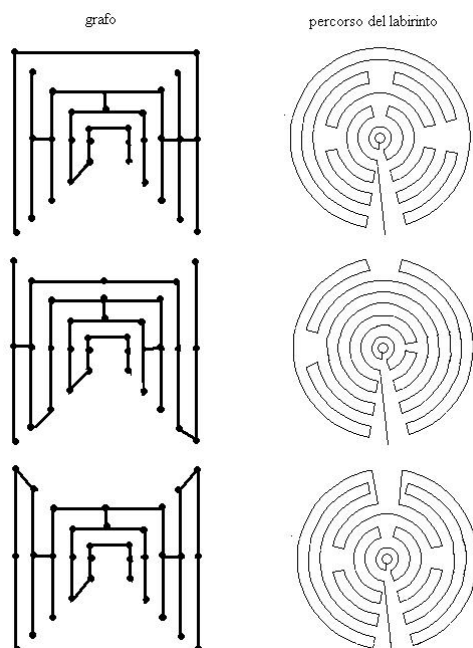


Figura 22: Grafi e labirinti

Per completare il modello è necessario dare delle regole ai grafi che permettano la riuscita dei labirinti. L'osservazione cruciale è la seguente: il grafo deve essere semplicemente connesso. Connesso significa che il disegno deve essere tutto attaccato, non ci può essere un lato che non è unito in alcun modo agli altri. In altre parole, presi due punti qualunque del grafo, è possibile unirli con una linea facente parte del grafo stesso.¹² Semplicemente connesso significa che i segmenti del grafo non possono formare percorsi chiusi. Questo fatto può essere intuito abbastanza semplicemente con l'aiuto di un disegno (fig. 23). Se allarghiamo le linee del grafo è facile verificare che il bordo rappresenta il percorso del labirinto.

Quindi se vogliamo che il labirinto sia unicursale è necessario che il bordo del grafo sia una curva semplice e chiusa (una curva omeomorfa ad una

¹²Tale definizione di connessione non è in realtà del tutto corretta, ma sufficiente ai nostri scopi. Una definizione corretta è: uno spazio topologico si dice connesso se non è esprimibile come unione di due aperti non vuoti e disgiunti.

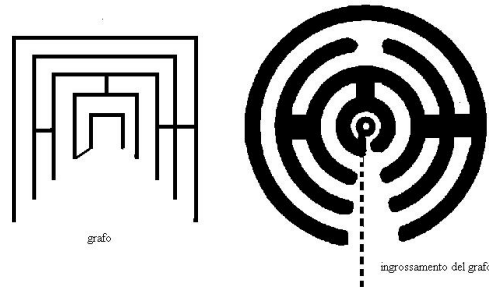


Figura 23: Grafo e labirinto

circonferenza). L'allargamento delle linee del grafo (l'interno al bordo) dovrà quindi essere un disco e perciò il grafo semplicemente connesso.

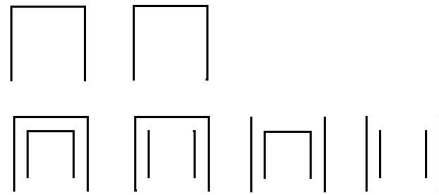
Il fatto che il grafo sia semplicemente connesso implica che:

1) Per ogni livello del grafo ci possono essere o tre lati AB, BC e CD oppure solo due AB e CD .

2) Tra due livelli consecutivi ci può essere solo: o un solo ponte se collega due livelli entrambi con tre lati (ed esso potrà essere una delle cinque posizioni A, M, N, P, D), oppure due ponti se almeno uno dei livelli ha due soli lati (che potranno essere uno in A o M e l'altro in D o P).

Da queste regole è possibile ricavare una formula ricorsiva che dia il numero dei possibili grafi di questo tipo, e quindi il numero dei labirinti. Sia n il numero dei livelli inscatolati. Per $n = 1$ ho due possibilità (fig. 24), una delle quali da escludere perché produce un grafo non connesso, bisogna però tenerne conto perché può produrre grafi connessi nella ricorsione.

Per $n = 2$ ho quattro possibilità: la prima, completata con un ponte produce 5 grafi, la seconda e la terza 4 grafi ciascuna, così anche la quarta ma sono da escludere perché non connessi. In totale 13 grafi.

Figura 24: Le possibili configurazioni di grafi per $n = 1$ e $n = 2$

Per continuare ricorsivamente sia:

γ_n il numero dei grafi semplicemente connessi di livello n

a_n il numero dei grafi semplicemente connessi di livello n avente come ultimo livello 3 lati.

b_n il numero dei grafi semplicemente connessi di livello n avente come ultimo livello 2 lati (contando anche quelli non connessi).

c_n il numero dei grafi non connessi di livello n in cui l'ultimo livello ha solo 2 lati.

Vogliamo

$$\gamma_n = a_n + b_n - c_n$$

Da quanto calcolato si ha che: $a_1 = b_1 = c_1 = 1$
 $a_2 = 5 + 4 = 9$, $b_2 = 4 + 4 = 8$, $c_2 = 4$ quindi:

$$\gamma_2 = 9 + 8 - 4 = 13$$

Segue allora che:

$$a_{n+1} = 5a_n + 4b_n, b_{n+1} = 4a_n + 4b_n, c_{n+1} = 4c_n$$

Da cui si ottiene subito $c_n = 4^{n-1}$ e con un po' di passaggi si arriva a

$$\gamma_{n+1} = 9\gamma_n + \gamma_{n-1} + 4^n$$

formula che dà ricorsivamente il numero di labirinti che soddisfano un grafo semplicemente connesso. Tale formula cresce molto rapidamente all'aumentare di n , (1, 13, 129, ...), e sarebbe importante cercare di individuare quelli "significativi".

Siamo andati forse un po' oltre le domande iniziali e spesso più che dando risposte apprendone di nuove. Ciò è certamente vero se si considerano solo le strette necessità per la costruzione del labirinto. Tuttavia, ritengo che, da questo punto di vista, le considerazioni teoriche non sono mai, né strettamente né largamente, richieste dalla pratica. Intendo dire che la forma che abbiamo deciso per il nostro labirinto sarebbe stata, con tutta probabilità, identica anche se non avessimo avuto il gusto di studiare, ed anche creare, una teoria matematica. Ma tale considerazione si può fare in ugual modo sull'utilità stessa di tutta la scienza di tipo non strettamente ingegneristico, come anche per l'arte. L'inutilità di tali operazioni teoriche, la gratuità ed il non senso con cui appaiono, è però parte stessa della forma alla quale sono legate. Esiste una ricchezza di pensiero, di problematiche e di soluzioni che non possono essere distinte dalla forma realizzata e che costituiscono un mondo tutt'altro che arido. Certo, sono parte inseparabile solo per chi le comprende e le vive, per l'occhio attento che si domanda, che mai si accontenta della risposta, del nome che ha imparato a pronunciare: labirinto.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Phillips, *Through Mazes to Mathematics*,
<http://math.math.sunysb.edu/~tony/mazes/>.
- [2] T. Morrison, *The Geometry of History*,
<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/morrison/index.html>.
- [3] A. Phillips, *The Topology of Roman Mosaic Mazes*, Leonardo 1992. Vol. 25, no. 3/4: p.321-329.
- [4] H. Rosenstiehl, *Path of Jerusalem in. International Congree on M. C. Escher*, H. S. M. Coxeter: p.221-230.
- [5] V. I. Arnold, *A branched covering of $CP^2 \rightarrow S^4$, Hyperbolicity and projectivity topology*, Matematicheskii Zhurnal , Vol. 29, No. 2, pp. 36-47, September-October 1988.
- [6] P. Di Francesco, O. Golinelli and E. Guitter, *Meanders: exact asymptotics*, Nucl. Phys. B 570 (2000) 699-712.
PrePrint <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9910453>
- [7] Il modello dei grafi, così come è stata esposta, è stata ideata, su alcune mie domande, dalla prof.ssa Maria Dedò del dipartimento di matematica "F. Enriques" di Milano.

Immagini

Le figure: 1, 10, 12, 16 sono prese da [1].

Le figure: 2, 3, 4, 7, 9, 11, 17, 18 sono prese da [2].